

Στο προηγούμενο μείθημα

Γενικά για διαδικασία γεννήσεων-θανάτων ισχύουν:

$$\begin{cases} P_{n, n+1}(dt) = \lambda_n dt + o(dt), & n=0,1,2,\dots \\ P_{n, n-1}(dt) = \mu_n dt + o(dt), & n=1,2,\dots \\ P_{n, n}(dt) = 1 - (\lambda_n + \mu_n) dt + o(dt), & n=1,2,3 \\ P_{n, j}(dt) = o(dt) & j \neq n, n+1, n-1. \end{cases}$$

όπου λ_n μια θετική παράμετρος (ρυθμός γεννήσεων)

μ_n μια θετική παράμετρος (ρυθμός θανάτων)

$o(dt)$ όροι πολύ μικροί ως προς dt . ζω $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$.

Μέσω μιας μελέτης καταλήγαμε:

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) & n=1,2,3 \\ \frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t), & n=0. \end{cases}$$

Πρέπει να
φέρω
Απόδειξη.
Πρέπει να
έχω συμπέρασμα

Έπειτα οδηγούμαστε στην εύρεση οριακών πιθανοτήτων

$$\bar{P}_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) \quad \mu \epsilon \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{P}_n = 1.$$

ή $\bar{P}_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t)$

Χρησιμοποιώντας $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ προκύπτει.

$$\lambda_0 \bar{P}_0 = \mu_1 \bar{P}_1$$

$$(\lambda_n + \mu_n) \bar{P}_n = \lambda_{n-1} \bar{P}_{n-1} + \mu_{n+1} \bar{P}_{n+1} \quad n=1,2,3$$

Τότε

$$\bar{P}_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \bar{P}_0 \quad n=1,2,3$$

Εύρεση του $\bar{P}_0$:

Γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \bar{P}_n = 1 \Rightarrow \bar{P}_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \right] = 1 \Rightarrow$

$$\bar{P}_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \right]^{-1}.$$

Διαδικασία ΜΟΝΟ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ ή Διαδικασία Poisson.

Έστω $\lambda_n = \lambda$ για $n=0,1,2,\dots$ με $\mu_n = 0$ για $n=0$ και $\mu_n = \mu$ για $n \geq 1$.
 $\bar{P}_0(0) = 1$ και $\bar{P}_i(0) = 0$ για $i \neq 0$
 $\uparrow$ σημαίνει; $\uparrow$ $i=1,2,\dots$

(0): χρόνος (την $t=0$, ο πελάτης με πιθανότητα 1).

Παρόμοια με προηγ. μαθήματα έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{P}_0(t)}{dt} + \lambda \bar{P}_0(t) = 0 \\ \frac{d\bar{P}_1(t)}{dt} + \lambda \bar{P}_1(t) = \lambda \bar{P}_0(t) \\ \vdots \\ \frac{d\bar{P}_n(t)}{dt} + \lambda \bar{P}_n(t) = \lambda \cdot \bar{P}_{n-1}(t) \end{cases}$$

Αν το σύστημα ξεκινά με N
 τότε $\bar{P}_N(0) = 1$
 $S = \{N, N+1, \dots\}$

από διαφορικές
 εξισώσεις.

Απλός τρόπος επίλυσης: $\frac{d\bar{P}_0(t)}{dt} + \lambda \bar{P}_0(t) = 0 \Rightarrow \bar{P}_0(t) = K \cdot e^{-\lambda t}$ με K σταθερά
 $-K\lambda e^{-\lambda t} + \lambda K e^{-\lambda t} = 0$
 επαληθεύεται

Πως προσδιορίζεται?

Ισχύει ότι $\bar{P}_0(0) = 1 \Rightarrow 1 = K \cdot e^{-\lambda \cdot 0} \Rightarrow \boxed{K=1}$

Επομένως $\boxed{\bar{P}_0(t) = e^{-\lambda t}} \quad (*)$

$\frac{d\bar{P}_1(t)}{dt} + \lambda \bar{P}_1(t) = \lambda \cdot \bar{P}_0(t) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{d\bar{P}_1(t)}{dt} + \lambda \bar{P}_1(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \bar{P}_1(t) = \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{1!}$

συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο.

Τότε οδηγούμαστε στη σχέση: $P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$, $n=0,1,2,\dots$
 $\{ \text{η αριθμεί σε χρόνο } t \}$
 $\rightarrow$ Poisson κατανομή.

Ο παραπάνω τρόπος οδήγησε σε λύση στην συγκεκριμένη περίπτωση αλλά θα δούμε και άλλο τρόπο για επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων διαφορών 2^{ου} βαθμού.

z-μετασχηματισμός ή γεννήτρια συν/ση.

Ορίσω $P(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t) z^n$, $|z| < 1$.
 $\downarrow$ Δυναμοσειρά

Διώχνω τις διαφορές με αυτόν τον τρόπο (z-μετασχηματισμό).

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n P(t, z)}{dz^n} \Big|_{z=0} = P_n(t).$$

$\otimes$ $P(t, z) = 0.5 z^0 + 0.3 z + 0.2 z^2$
 $\otimes$ $P(t, z) = \sum P_n(t) z^n$ Δηλ. $P_0(t) = 0.5$, $P_1(t) = 0.3$
 $P_2(t) = 0.2$
 είναι Μετασχηματισμός Laplace. (Διώχνω τα διαφορικά)

Πως διώχνω διαφορικά? $\rightarrow$ Ένας τρόπος

Πως δουλεύει στην πράξη:

Έχω το σύστημα: $\frac{d p_0(t)}{dt} + \lambda p_0(t) = 0$

πολλών καθεμία με $z^0, z^1, \dots, z^n$

$$\frac{d p_1(t)}{dt} + \lambda p_1(t) = \lambda p_0(t)$$

$$\frac{d p_n(t)}{dt} + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)$$

αντίστοιχα: $z^0 \frac{d p_0(t)}{dt} + \lambda z^0 p_0(t) = 0$

και αθροίζω κατά μέλη

$$z^1 \frac{d p_1(t)}{dt} + \lambda z^1 p_1(t) = \lambda z^1 p_0(t)$$

$$z^n \frac{d p_n(t)}{dt} + \lambda z^n p_n(t) = \lambda z^n p_{n-1}(t)$$

$$: z^0 \frac{dp_0(t)}{dt} + z^1 \frac{dp_1(t)}{dt} + \dots + z^n \frac{dp_n(t)}{dt} + \lambda [z^0 p_0(t) + z^1 p_1(t) + \dots + z^n p_n(t)] =$$

$$= \lambda z [p_0(t) + z^1 p_1(t) + \dots + \dots]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{P(t,z)}$

Άρα $\frac{dP(t,z)}{dt} + \lambda P(t,z) = \lambda z P(t,z)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dP(t,z)}{dt} + \lambda (1-z) P(t,z) = 0.}$$

Από αυτό προκύπτει: $P(t,z) = C \cdot e^{-\lambda(1-z)t}$ όπου C : σταθερά.

Εύρεση της σταθεράς C .

$$P(t,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) z^n$$

Γνωρίζω $p_0(0) = 1$, άρα $P(0,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(0) z^n \Rightarrow P(0,z) = 1$.

$p_i(0) = 0 \quad i \neq 0$

Επομένως $1 = C \cdot e^{-\lambda(1-z) \cdot 0} \Rightarrow \boxed{C=1}$.

Επομένως $P(t,z) = e^{-\lambda(1-z)t}$ (γενική λύση)

Όμως επιθυμώ να βρω τις $p_n(t)$.

Υπενθύμιση: $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) z^n = P(t,z)$. Άρα πρέπει να γράψω το $P(t,z)$ στην μορφή αυτή ως προς z^n . Οι συντελεστές του z^n είναι οι ζητούμενες πιθανότητες.

$$P(t,z) = e^{-\lambda(1-z)t} \Rightarrow P(t,z) = e^{-\lambda t} e^{\lambda z t} \Rightarrow P(t,z) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda z t)^n}{n!}$$

Διότι, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ Το εφαρμόζω για $x = \lambda z t$.

$$\text{Συνεπώς } P(t,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n t^n}{n!} \cdot z^n$$

Άρα $P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad n=0,1,\dots \leftarrow \text{Poisson.}$

↓ n αφίξεις πελατών σε χρόνο t.

Παρατήρηση Αν $P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$, τότε :

$$P_{n+1}(dt) = \frac{(\lambda dt)^1 e^{-\lambda dt}}{1} \iff P_{n+1}(dt) = \lambda dt \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda dt)^n}{n!}$$

Χρησιμοποιώ ότι $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$

Επομένως $P_{n+1}(dt) = \lambda dt \left[1 - \frac{\lambda dt}{1!} + \frac{(\lambda dt)^2}{2!} + \dots \right]$

$$\Rightarrow P_{n+1}(dt) = \lambda dt + o(dt)$$

Θυμίζω ότι $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$

$$\lambda dt - \lambda^2 \frac{dt^2}{1!} + \frac{\lambda dt (\lambda dt)^2}{2!} + \dots$$

Διαίρω με dt και παίρνω όριο: $\lim_{dt \rightarrow 0} dt = 0$.

Πόρισμα Σε μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ , οι τ.μ

$T_0, T_1, T_2 \dots$ που παριστάνουν το χρόνο ανάμεσα σε δύο διαδοχικά
γεγονότα είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν εκθετική με
παράμετρο λ .

Γιατί?

$T_n = t_{n+1} - t_n$, $n=0,1,2,\dots$ ο χρόνος μεταξύ της n -οστής και
($n+1$)-οστής γέννησης.

Θα προσδιορίσουμε την ασκ.

Αρμεί να προσδιορίσω $P[T_n \leq \tau] = F_{T_n}(\tau)$

Εναλλακτικά μπορώ να βρω την $P[T_n \geq \tau]$ (πιο εύκολο)

Τι σημαίνει $T_n \geq \tau$?



Σημαίνει ότι ο χρόνος μεταξύ της $n+1$ και η γέννησης
είναι μεγαλύτερος από τ .

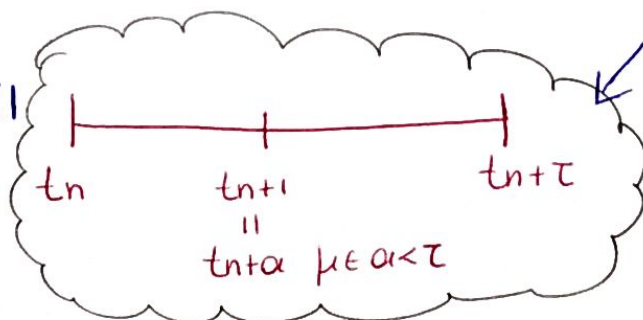
Επομένως αν t_n είναι η χρονική στιγμή της n -οστής γέννησης

τότε: $\left(\begin{matrix} \text{αριθμός των αφίξεων ως τη χρονική} \\ \text{στιγμή } t_n + \tau \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{αριθμός αφίξεων} \\ \text{ως τη χρονική} \\ \text{στιγμή } t_n \end{matrix} \right) = 0$

Σχηματικά:



ΠΡΟΣΟΧΗ ΟΧΙ



ΛΑΘΟΣ.

$$\text{Άρα } P(T_n \geq z) = P(X(t_n + z) - X(t_n) = 0)$$

Επομένως θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα 0 αφίξεις σε χρόνο z .

$$\text{δηλ. } P(T_n \geq z) = e^{-\lambda z}, z \geq 0 \text{ ή } P(T_n \leq z) = 1 - e^{-\lambda z}, z \geq 0$$

— εκθετική με παράμετρο λ .
ΕΚΘ(λ)

Παρατήρηση* Από οποιοδήποτε σημείο και αν εξετάσουμε τη διαδικασία Poisson, το χρονικό διάστημα μέχρι την επόμενη αφίξη έχει την ίδια κατανομή με το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων (ιδιότητα ομιοστίαις)

ΚΑΘΑΡΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΘΑΝΑΤΩΝ.

Έστω ότι το σύστημά μας τη χρονική στιγμή 0, βρίσκεται στην κατάσταση M και από εκεί και πέρα μπορούν να συμβούν μόνο θάνατοι.

$$\text{δηλ. } \{X(t) : 0 \leq t < \infty\} \quad S = \{0, 1, 2, \dots, M\}$$

$$\lambda_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = \mu \quad n = 1, 2, \dots, M.$$

Ισχύει $P_M(0) = 1, P_i(0) = 0 \quad i \neq M.$

Υποθέτουμε (Διαδικασία ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ - ΘΑΝΑΤΩΝ)

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = \mu P_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) \end{cases}$$

Επομένως $\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) \\ \vdots \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} + \mu P_n(t) = \mu P_{n+1}(t) & n = 1, \dots, M-1 \\ \text{για } n=M \end{cases}$$

$$\frac{dP_M(t)}{dt} + \mu P_M(t) = 0 \quad (\mu_{M+1} = 0, \lambda_{M-1} = 0)$$

Αρχικές Συνθήκες

$$\text{με } P_M(0) = 1, P_i(0) = 0 \quad i \neq M$$

Από $\frac{dP_M(t)}{dt} + \mu P_M(t) = 0 \Rightarrow P_M(t) = K \cdot e^{-\mu t}$

Καθώς $P_M(0) = 1 \rightarrow 1 = K e^{-0} \Rightarrow K = 1$

Άρα $P_M(t) = e^{-\mu t}$

Για $n = M-1$ προκύπτει (από 2^η εξίσωση συστήματος)

$\frac{dP_{M-1}(t)}{dt} + \mu P_{M-1}(t) = \mu P_M(t)$ και αναδιατάσσοντας έχουμε:

$\frac{dP_{M-1}(t)}{dt} + \mu P_{M-1}(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$

$\Rightarrow P_{M-1}(t) = \mu t e^{-\mu t}$

Παρόμοια: $P_{M-n}(t) = \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!} \quad n = 0, \dots, M-1$

και $P_M(t) = e^{-\mu t}$

► $P_0(t) = ?$ Δηλ. τι γίνεται όταν για την $P_{M-n}(t)$ ισχύει $n=M$?

Ξέρουμε ότι: $\sum_{n=0}^M P_n(t) = 1$ (αθροισμα πιθανοτήτων)

Επομένως $P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^M P_n(t) \Rightarrow P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^M \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}$

Η κατανομή "μοιάζει" με Poisson.

Διακτές τιμές: $0, 1, 2, \dots, M$

Οι πιθανότητες για $1, 2, \dots, M$ είναι ίδιες με αυτές της Poisson

Ενώ στο 0. "τοποθετούμε ότι περισεύει" $\left\{ \begin{array}{l} \text{ότι είχε η κλασσική} \end{array} \right.$

Παρατήρηση Με παρόμοιο τρόπο όπως πριν, δοθέντος ότι το σύστημα δεν είναι αίδειο, η χρονική απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών θανάτων ακολουθεί $Exp(\mu)$

Σύστημα $M/M/1/oo$ ($F_c F_s$)

Το $M/M/1/oo$ είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες

- ^(αφίξεις) έρχονται σύμφωνα με την κατανομή Poisson με παράμετρο λ και τοποθετούνται σε μια απλή ουρά όπου περιμένουν να εξυπηρετηθούν.
- Υπάρχει μόνο ένας υπάλληλος εξυπηρέτησης και οι χρόνοι
- εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ
- Ο χώρος αναμονής του συστήματος είναι απεριόριστος.
- Τέλος οι διαδικασίες αφίξεων και αναχωρήσεων είναι ανεξίτητες μεταξύ τους, ενώ η πειθαρχία της ουράς είναι $F_c F_s$.

Ανάλυση των καταστάσεων του συστήματος.

Έστω $\{f(t) : 0 \leq t < \infty\}$ είναι η οικογένεια τ.μ που παριστάνει τον αριθμό των πελατών μέσα στο σύστημα.

Σύστημα:

Προσοχή: ουρά + κανάλι εξυπηρέτησης τη χρονική στιγμή t .

Χώρος καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

Για να υιοθετήσω όσα ισχύουν στην διαδικασία γεννήσεων-θανάτων θα πρέπει νδο

- (i) Ιδιότητα Markov
- (ii) Στατικότητα.

Ιδιότητα στατιστικότητας.

Παραδείγματα	↓ ώρα			
Χρόνος:	10^{∞}	10^{30}	13^{∞}	13^{30}
Πελάτες:	8	20	8	20

Διαδικασία Poisson.

Μαρκοβιανή. Με βάση το παρόν καθορίζω το μέλλον χωρίς να με ενδιαφέρει το παρελθόν.

Υπενθύμιση: Έστω το η αρχή των μετρήσεων, t_n η χρονική στιγμή της n -οστής αψίγης και $T_n = t_{n+1} - t_n$, $n=0,1,2,\dots$

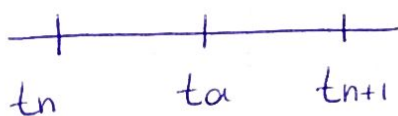
Τότε είχαμε δει ότι:

$$P(T_n > z) = P(N(z) = 0) = e^{-\lambda z}$$

ή

$$P(T_n \leq z) = 1 - e^{-\lambda z}, z > 0 \text{ δηλ. } T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Όμοια τώρα έστω t_a η χρονική στιγμή που δεν αντιστοιχεί σε γέννηση με:



$$Z_n = t_{n+1} - t_a$$

$$P(Z_n > z) = P(X(t_a + z) - X(t_a) = 0) = P(N(z) = 0) = e^{-\lambda z}, z > 0$$

ΒΛΕΠΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ *

Έτσι αποδείχθηκε η ιδιότητα αμνησίας ή Markov.

$$P_{n,n+1}(dt) = \dots \quad P_{n,n}(dt) = \dots$$

Παρατήρηση Το σύστημα αλλάζει κατάσταση με δυο τρόπους:

α) Όταν ένας πελάτης έρχεται (γέννηση)

β) Όταν ένας πελάτης τελ. την εξυπηρέτησή του και φεύγει (θάνατος)

Αφίξεις Poisson

$$P_{n \rightarrow n+1}(dt) = \frac{(\lambda dt)^n e^{-\lambda dt}}{n!} \Rightarrow \boxed{P_{n \rightarrow n+1}(dt) = \lambda dt + o(dt)} \quad n=0, \dots$$

το Απώ προηγούμενο

Παρόμοια

$$\boxed{P_{n \rightarrow n-1}(dt) = \mu dt + o(dt)} \quad n=1, 2, \dots$$

Επομένως $\lambda_n = \lambda \quad n=0, 1, 2, \dots$
 $\mu_n = \mu \quad n=1, 2, \dots$

Υπενθύμιση
$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} + \lambda p_0(t) = \mu p_1(t) \\ \frac{dp_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \end{cases} \quad n=1, 2, \dots$$

Ειδική Περίπτωση

Συνθήκη: $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0 \quad n \neq 0$ και $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} + \lambda p_0(t) = \mu p_1(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu) p_1(t) = \lambda p_0(t) + \mu p_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \end{cases}$$

Σε προηγούμενη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε ο z-μετασχηματισμός και οδηγήθηκε σε μια διαφ. εξίσωση

Εδώ θα χρησιμοποιηθεί ο Μετ/σμός Laplace.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΙΣΜΟΥ Laplace.

Τι είναι: ΜΕΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Έστω μια συνλση $f(t)$ η οποία παίρνει μη μηδενικές τιμές της συνεχούς παραμέτρου t , δηλ. $f(t) \neq 0, t \geq 0$.

Μετισμός Laplace της $f(t)$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t) dt$$

όπου s μιγαδική μεταβλητή

Αν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποιο $s = \sigma + i\tau$ τότε συγκλίνει και για όλα τα $s = \sigma + i\tau$ για τα οποία $\sigma > \sigma_0$

2η θ.2.ε η $f(t)$ είναι σ.π.π.

Άρα $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$, επομένως $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-0t} f(t) dt = 1$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ :: Ο μετισμός Laplace της $f(t) = 1$ είναι

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \underbrace{\int_0^{+\infty} s \cdot e^{-st} dt}_{\text{σ.π.π εκθ}(s)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

• Μετισμός Laplace $f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

Μας θυμίζει $\Gamma(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx = \beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)$$

$$\frac{0!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} dt = \left(\frac{1}{s}\right)^n \frac{\Gamma(n)}{(n-1)!}$$

$$F(s) = \frac{\left(\frac{1}{s}\right)^n \Gamma(n)}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^{n-1} e^{-t/(1/s)}}{\left(\frac{1}{s}\right)^n \Gamma(n)}}_{=1} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^n}, \text{ αφού } \Gamma(n) = (n-1)!$$

• Μετασχηματισμός Laplace $\boxed{f(t) = A \cdot e^{-\alpha t}}$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} A e^{-\alpha t} dt \Rightarrow F(s) = A \int_0^{+\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt$$

$$F(s) = A \cdot \frac{1}{s+\alpha} \int_0^{+\infty} \underbrace{(s+\alpha) e^{-(s+\alpha)t}}_1 dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F(s) = \frac{A}{s+\alpha}}$$

• Μετασχηματισμός της $\boxed{f(t) = t \cdot e^{-\alpha t}}$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s+\alpha)t} t dt \quad \text{Ουκλίδης} \quad \left(\frac{1}{s+\alpha}\right)^2$$

$$\Gamma\left(2, \frac{1}{s+\alpha}\right)$$

$$\text{Υπόθεση: } \Gamma(2) = 1$$

• Μετασχηματισμός της $\boxed{f(t) = \frac{t^n e^{-\alpha t}}{n!}}$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+s)t} \frac{t^{n+1-1}}{\Gamma(n+1)} dt = \frac{1}{(\alpha+s)^{n+1}}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) Αν $F(s) = L(f(t))$ και $m(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx$ τότε $L(m(t)) = F(s)G(s)$
 $G(s) = L(g(t))$

ΟΧΙ ΑΝΘΑ ΘΑ ΔΙΝΟΝΤΑΙ

2) Αν $F(s) = L(f(t))$ τότε $L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$ } ΝΑΙ
 (Δεν θα ζητηθεί)
 Ανά θα πρέπει να την θυμάμαι

Απόδειξη

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} df(t)$$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{d}{dt} e^{-st}}_{= -s e^{-st}} f(t) dt$$

$$= -f(0) + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

3) Αν $F(s) = L(f(t))$ τότε $L\left(\int_0^t f(x) dx\right) = \frac{F(s)}{s}$

4) $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

Για το M/M/1/∞ σύστημα.

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} + \lambda p_0(t) = \mu p_1(t), & n=0 \\ \vdots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), & n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Έστω $\Pi_n(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} p_n(t) dt$ ο μετασμός Laplace της $p_n(t)$

Τότε έχουμε ότι $\boxed{L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0)}$ ΠΡΟΣΟΧΗ

Επομένως "παίρνοντας" Laplace και στα δύο μέλη.

$$\begin{cases} s\Pi_0(s) - p_0(0) + \lambda\Pi_0(s) = \mu\Pi_1(s) \\ \vdots \\ s\Pi_n(s) - p_n(0) + (\lambda + \mu)\Pi_n(s) = \lambda\Pi_{n-1}(s) + \mu\Pi_{n+1}(s) \quad n=1, 2, \dots \end{cases}$$

Όμως $p_0(0)=1$, $p_n(0)=0$ $n \neq 0$.

Άρα $\begin{cases} (\lambda + s)\Pi_0(s) = \mu\Pi_1(s) + 1 \\ (\lambda + \mu + s)\Pi_n(s) = \lambda\Pi_{n-1}(s) + \mu\Pi_{n+1}(s) \quad (*) \end{cases}$

$(*) \mu\Pi_{n+1}(s) - (\lambda + \mu + s)\Pi_n(s) + \lambda\Pi_{n-1}(s) = \text{εξίσωση Διαφορών Δευτέρου Βαθμού}$

Θεωρώ τη χαρακτηριστική εξίσωση: $\mu x^2 - (\lambda + \mu + s)x + \lambda = 0$

↓ Εξαρτάται από το s

Αν $\alpha(s), \beta(s)$ οι ρίζες της $\beta(s) < \alpha(s)$

Τότε $\Pi_n(s) = A\alpha^n(s) + B\beta^n(s)$ όπου A, B σταθ.

Ισχύει ότι $\alpha(s)\beta(s) = \frac{\lambda}{\mu} > 0$ άρα $\alpha(s), \beta(s)$ ομόσημες

$$\sum p_n(t) = 1 \xrightarrow{\text{Laplace}} \underbrace{L\left(\sum p_n(t)\right)}_{\sum \Pi_n(s)} = \underbrace{L(1)}_{\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}} \text{ διατ. η ισότητα.} \quad \text{αίρα} \quad \boxed{\sum \Pi_n(s) = \frac{1}{s}}$$

$$\sum \Pi_n(s) = \sum (A \alpha^n(s) + B \beta^n(s))$$

$$\alpha(s) + \beta(s) = \frac{\lambda + \mu + s}{\mu} > 0.$$

αίρα $\alpha(s) > 0 \quad \beta(s) > 0$

Όμως πρέπει $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1 \Rightarrow \text{Laplace} \sum_{n=0}^{+\infty} \Pi_n(s) = \frac{1}{s}$ όπως είπαμε.

$$\text{Άρα} \quad A \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n(s) + B \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n(s) = \frac{1}{s}$$

Θα πρέπει επομένως $|\alpha(s)| < 1$
 $|\beta(s)| < 1$

Παρατήρηση

πρόσημο συντελεστή 2ου όρου

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \\ \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ 0 < \beta(s) \qquad \qquad \alpha(s) \end{array}$$

Επομένως εντός των $(\beta(s), \alpha(s))$ πρόσημο
 ετερόσημο του μ , δηλ αρνητικό

Το ερώτημα είναι: το 1 εντός των ριζών.?

Για $x=1$: $\mu \cdot 1^2 - (\lambda + \mu + s) \cdot 1 + \lambda = -s < 0$

Άρα 1 είναι εντός των ριζών, δηλ. $0 < \beta(s) < 1 < \alpha(s)$

Συνεπώς πρέπει $A=0$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} \Pi_n(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow B \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n(s) = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow \boxed{B \cdot \frac{1}{1 - \beta(s)} = \frac{1}{s}}$$

Επομένως

$$B = \frac{1 - \beta(s)}{s}$$

Ο αρχικός μας σκοπός
είναι να βρούμε τις πιθανότητες

$$\text{Άρα } \pi_n(s) = \frac{1 - \beta(s)}{s} \beta^n(s)$$

ο Laplace $P_n(t)$.

$$\text{Αν } \pi_n(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{τότε } P_n(t) = 1$$

Η αντιστροφή επιτυγχάνεται αλλά ανάγεται σε συν/σεις Bessel
Ξεφεύγει από τους σκοπούς μας.